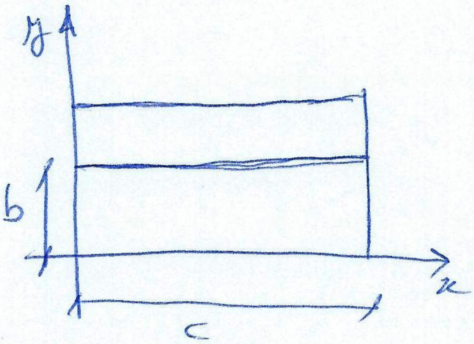
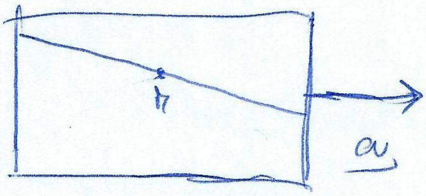
Statica relativa - serbatoio

Consideriamo un serbatoio soggetto a un'accelerazione:





Nello spazio, dall'equazione $\rho \underline{f} + \nabla p = 0$:

$$\underline{f} = (0, -g, 0) \qquad \underline{a} = (a, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases} \iff \begin{cases} p = -\rho a x + cost \\ p = -\rho g y + cost \end{cases}$$

Differenziale esatto

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \underbrace{\cancel{\frac{\partial p}{\partial z} dz}}_{=0} = -\rho a\, dx - \rho g\, dy$$

$$\Rightarrow p = -\rho a x - \rho g y + cost \Rightarrow y = -\frac{a}{g} x + cost$$

Se $a = g$ la retta forma un angolo di $\frac{3}{4}\pi$ con l'asse x.
In M il fluido non si muove, quindi calcoliamo $cost = c_1$ per $x = \frac{c}{2}$ e $y = b$:

$$b = -\frac{a}{g}\frac{c}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = b + \frac{a}{g}\frac{c}{2} \Rightarrow y = -\frac{a}{g} x + b + \frac{a}{g} \cdot \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{g}\left(x - \frac{c}{2}\right) + b$$

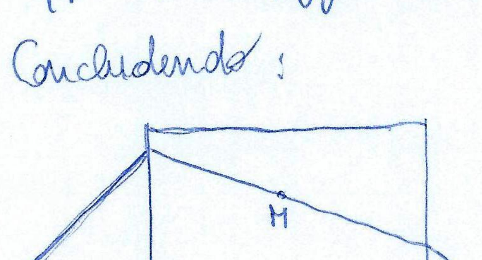
All'interfaccia:

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{g}\left(x - \frac{c}{2}\right) + b \\ p = 0 \\ p = -\rho a x - \rho g y + c_2 \end{cases} \Rightarrow -\rho a x - \rho g\left[-\frac{a}{g}\left(x - \frac{c}{2}\right) + b\right] + c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{-\rho a x} + \cancel{\rho a x} - \rho a \frac{c}{2} - \rho g b + c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = \rho a \frac{c}{2} + \rho g b$$

Concludendo:

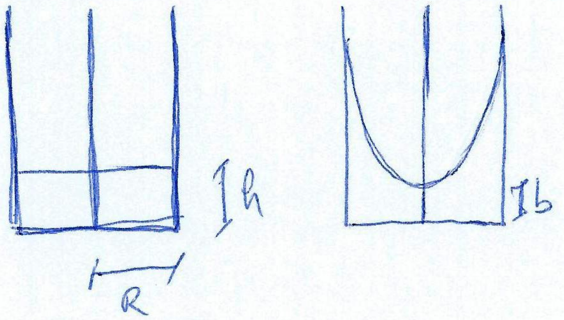


$$p = -\rho a\left(x - \frac{c}{2}\right) - \rho g (y - b)$$

Se $x = cost \Rightarrow p = -\rho g y + cost$

Statica relativa - sistema in rotazione

Abbiamo un cilindro contenente acqua e soggetto a rotazione:



$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Complessivamente:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 r\, dr - \rho g\, dz$$

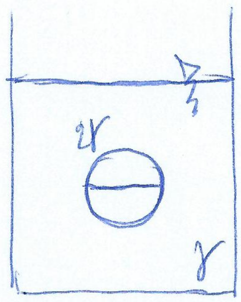
$$\Rightarrow p = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g z + cost$$

Nel caso di isobare: $z = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} + cost \Rightarrow$ la superficie libera è un'isobara e una parabola.

Per $r = 0 \Rightarrow z = b \Rightarrow c_1 = b \Rightarrow z = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} + b$

Statica relativa - corpi immersi

Sfera immersa in un fluido e riempita per metà con un fluido di γ doppio rispetto a quello in cui è immersa:



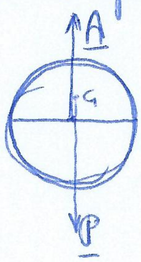
$$P = 2\gamma \cdot \frac{2}{3}\pi R^3 = \gamma \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

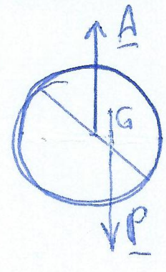
$$\Rightarrow A = P$$

L'equilibrio è indifferente alle traslazioni, mentre non lo è rispetto alle rotazioni.

Si hanno due casi:

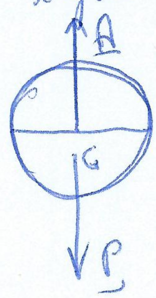
- metà superiore piena, equilibrio instabile:

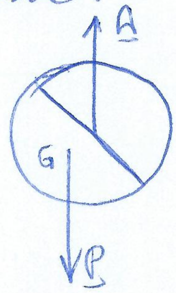




La sfera tende a portare la parte piena verso il basso;

- metà inferiore piena, equilibrio stabile:

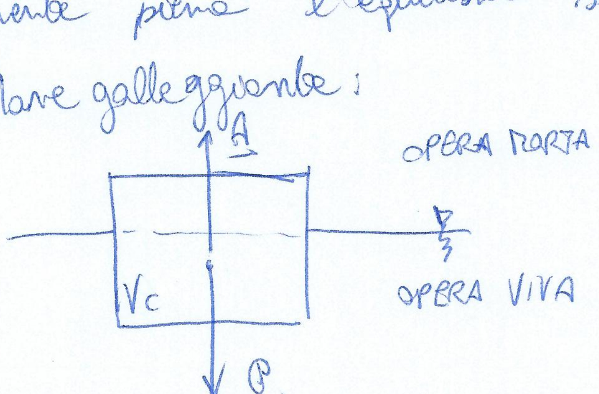




La sfera tende a tornare nella posizione iniziale.

Se la sfera fosse costituita dallo stesso materiale e completamente piena l'equilibrio sarebbe indifferente.

Nave galleggiante:



$$A = P = \gamma V_c$$

V_c volume di carena

traslazioni orizzontali: eq. indifferente
traslazioni verticali: eq. stabile